ÉCOLE DE HAUTES ÉTUDES COMMERCIALES DU NORD

Option ECONOMIQ. **MATHEMATIQUES** ° (4 h) 1982

PROBLEME 1

Soit n un entier naturel et f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f_n(x) = e^{-\frac{1}{x}} . x^{-n} & \text{pour } x > 0 \\ f_n(0) = 0 \end{cases}$$

1°. Montrer que f_n est continue sur $[0,+\infty[$

2°. Montrer que f_n est dérivable sur $[0,+\infty[$

3°. Représenter graphiquement la fonction f_n pour $n \neq 0$, et la fonction f_0 .

4°. Etudier, suivant les valeurs de n la convergence de l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} f_n(x).dx$$

5°. Trouver une relation de récurrence entre I_n et I_{n+1} quand ces intégrales convergent et en déduire la valeur de I_n en fonction de n ,

quand I_{n+1} converge.

PROBLEME 2

Soit A l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

1°. Soit E le sous-ensemble de A des applications f telles que :

$$\forall n \geqslant 1 \quad , \quad f(n+1) = a.f(n) + b.f(n-1) \qquad \text{relation (i)}$$

où a et b désignent des réels.

a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel de A .

b) Soit α et β deux réels quelconques. Montrer qu'il existe une application unique f de A telle que $f(0) = \alpha$ et $f(1) = \beta$ et vérifiant la relation (i) .

2°. Soit Φ l'application de E dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall f \in E \quad , \quad \Phi(f) = (f(0),f(1))$$

a) Montrer que Φ est une application linéaire

b) Montrer que Φ est bijective

c) Quelle est la dimension de E ?

d) Soit $f_1 = \Phi^{-1}\left[(1,0)\right]$ et $f_2 = \Phi^{-1}\left[(0,1)\right]$

Montrer que $\{f_1 , f_2\}$ est une base de E .

Calculer les coordonnées d'une fonction f de E dans cette base.

3°. Soit g l'élément de A , défini par : $\forall n \in \mathbb{N}$, $g(n) = x^n$, où x est un réel fixé non nul.

a) Montrer que g est élément de E , si et seulement si x est solution d'une équation du second degré que l'on déterminera.

b) Trouver une relation entre a et b pour que cette équation ait 2 solutions distinctes x_1 et x_2 (que l'on ne calculera pas).

c) Cette condition étant vérifiée, on pose

° Lors de la correction il sera tenu compte de la clarté des raisonnements et du soin apporté aux copies.

.../...

$\forall n \in \mathbb{N}$, $g_1(n) = x_1^n$ et $g_2(n) = x_2^n$

Montrer que $\{ g_1 , g_2 \}$ est une base de E .

Soit f un élément de E . On pose $f = \lambda . g_1 + \mu . g_2$

Calculer λ et μ en fonction de f(0) , f(1) , x_1 et x_2 .

PROBLEME 3

Soit (x_n) et (y_n) deux suites réelles définies par

$x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\begin{cases} x_n = x_{n-1} + y_{n-1} \\ y_n = y_{n-1} - x_{n-1} \end{cases}$

Soit (z_n) la suite complexe définie par

$\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = x_n + iy_n$

1°. Calculer z_0 , z_1 , z_2 et z_3 .

2°. a) Montrer que (z_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) En déduire l'expression de z_n en fonction de n .

c) Donner z_n sous forme trigonométrique.
Exprimer alors x_n et y_n en fonction de n .

3°. Soient : $A_n = \sum_{k=0}^{n} z_k$

$B_n = \sum_{k=0}^{n} x_k$

$C_n = \sum_{k=0}^{n} y_k$

Calculer A_n , B_n et C_n en fonction de n .

PROBLEME 4

Un ascenseur dessert le rez-de-chaussée (niveau 0) et les niveaux 1, 2 et 3 d'un immeuble.

Dans la suite du problème on appellera "étage" la distance parcourue par l'ascenseur entre 2 niveaux consécutifs.

On suppose d'autre part :

- que les habitants n'utilisent l'ascenseur que pour se rendre du rez-de-chaussée à leur niveau d'habitation et réciproquement
- qu'il y a le même nombre d'habitants à chaque niveau et que tous l'utilisent avec la même fréquence
- que les habitants du rez-de-chaussée ne l'utilisent jamais
- que l'ascenseur ne peut transporter qu'une personne à la fois
- que, bien sûr, les habitants utilisent l'ascenseur autant de fois pour monter que pour descendre
- que lorsqu'on utilise l'ascenseur, celui-ci doit se rendre du niveau où il se trouve au niveau où il est appelé, puis transporter l'habitant à son niveau de destination.

PARTIE A

On s'intéresse dans cette partie uniquement aux descentes des habitants.

Soit n , $0 \leqslant n \leqslant 3$, le niveau où se trouve l'ascenseur lorsqu'il est appelé, et p , $1 \leqslant p \leqslant 3$, le niveau d'habitation de l'utilisateur.

a) Donner dans le tableau 1 le nombre d'étages parcourus par l'ascenseur en fonction de n et de p .

p \ n	0	1	2	3
1				
2				
3				

Tableau 1

b) Quelles sont les probabilités respectives d_0 , d_1 , d_2 et d_3 pour que l'ascenseur se trouve aux niveaux 0 , 1 , 2 et 3 lorsqu'on l'appelle ?

c) Soit x_k $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ la variable aléatoire réelle égale au nombre d'étages parcourus par l'ascenseur, pour une utilisation d'un habitant du niveau k .
Donner les lois de probabilité de x_1 , x_2 et x_3 , et en déduire les espérances mathématiques $E(x_1)$, $E(x_2)$, $E(x_3)$.

d) Combien d'étages parcourt en moyenne l'ascenseur, par descente d'un habitant de l'immeuble ?

PARTIE B

On s'intéresse dans cette partie uniquement aux montées des habitants.

a) n et p ayant la même signification que dans la partie A, donner dans le tableau 2 le nombre d'étages parcourus par l'ascenseur en fonction de n et de p .

p \ n	0	1	2	3
1				
2				
3				

Tableau 2

b) Soit y_k $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ la variable aléatoire égale au nombre d'étages parcourus par l'ascenseur, pour une utilisation d'un habitant du niveau k .
Donner les lois de probabilités de y_1 , y_2 et y_3 .

c) Combien d'étages parcourt en moyenne l'ascenseur par montée d'un habitant de l'immeuble ?

PARTIE C

On s'intéresse maintenant à l'ensemble des utilisations de l' ascenseur (montées et descentes des habitants).

a) Soit Z_k $(1 \leqslant k \leqslant 3)$ la variable aléatoire réelle égale au nombre d'étages parcourus par l'ascenseur pour une utilisation d'un habitant du niveau k .
Déduire des résultats des parties A et B , les lois de probabilité des variables aléatoires Z_1 , Z_2 et Z_3 .

b) Calculer $E(Z_1)$, $E(Z_2)$ et $E(Z_3)$.

c) En admettant que le coût d'utilisation de l'ascenseur est proportionnel au nombre d'étages qu'il parcourt, quelle devrait être la répartition équitable des charges annuelles d'ascenseur, par niveau d'habitation, sachant qu'elles s'élèvent à 11 600 F. ?

FIN

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail